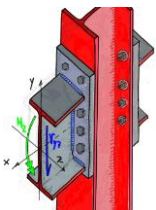




# RESOLUCIÓN DE ARCO BIEMPOTRADO MEDIANTE CÁLCULO TRADICIONAL. CONTRASTE DE RESULTADOS CON SOFTWARE DE CÁLCULO SAP2000

*Video explicativo en:*

<https://www.youtube.com/watch?v=zOeKyqkXWQs>



Pedro MARTINEZ & Sergio RODRIGUEZ

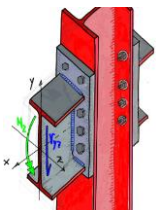
[https://youtube.com/@canal\\_estructuras\\_sergio](https://youtube.com/@canal_estructuras_sergio)



Nota de los autores:

*Este documento es únicamente de carácter didáctico. Se ha pretendido en todo momento describir el cálculo “paso a paso” para la total comprensión del mismo.*

*Queda expresamente prohibida la copia, reproducción o difusión mediante cualquier medio del presente documento para fines lucrativos.*

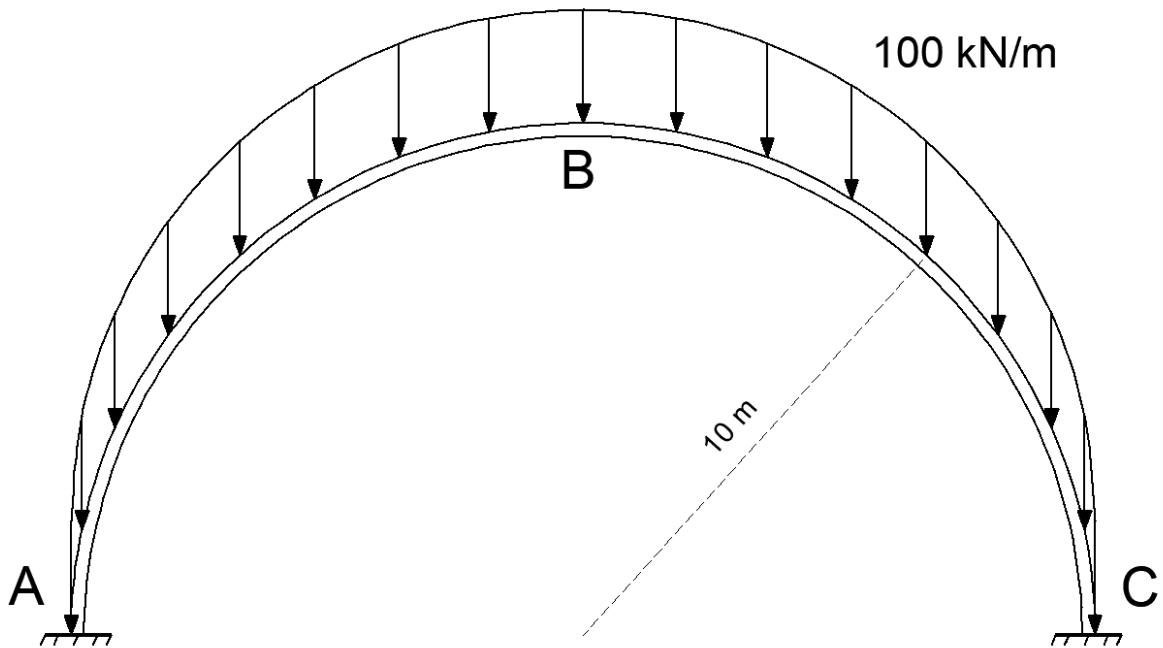


Pedro MARTINEZ & Sergio RODRIGUEZ

[https://youtube.com/@canal\\_estructuras\\_sergio](https://youtube.com/@canal_estructuras_sergio)

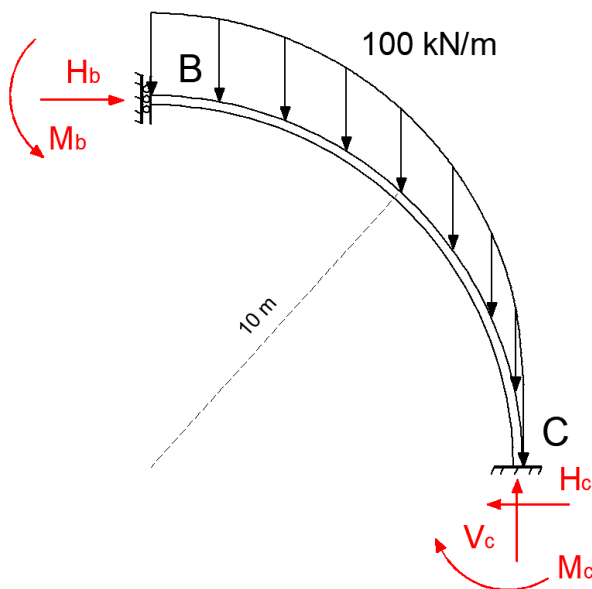


1. Determinación de las reacciones del arco adjunto



Lo primero que vamos a hacer es determinar si la estructura es isostática o hiperestática.

Para mayor facilidad de trabajo y por ser una estructura simétrica de carga y forma, nos vamos a quedar con la mitad de la estructura aplicando los conceptos de simetría.

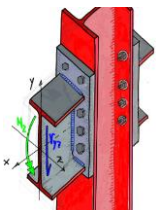


$$GH = 5 - 3 = 2$$

Como se puede ver, estamos frente a una estructura hiperestática de grado 2, lo que quiere decir que, además de las ecuaciones de la estática necesitaremos 2 ecuaciones más para hacer el sistema compatible.

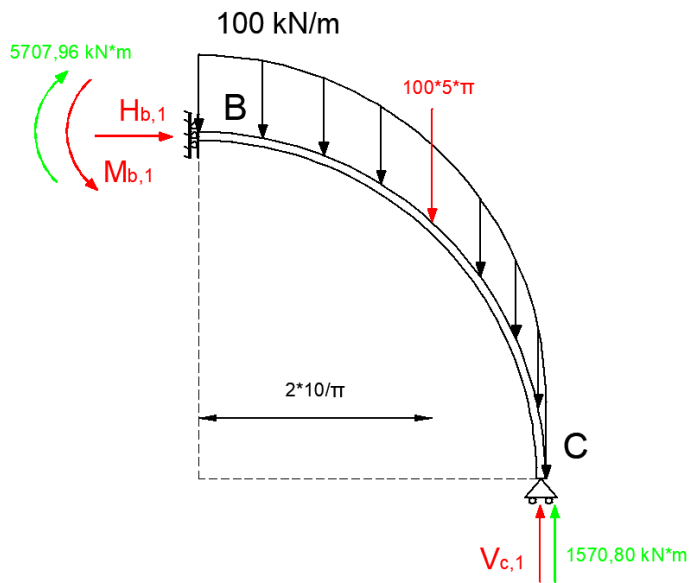
Las incógnitas hiperestáticas elegidas por serán  $M_c$  y  $H_c$

Empezamos por dividir el cálculo mediante estados independientes.



**ESTADO I**

Calculamos las reacciones y ley de flectores:



$$\sum FV = 0 \rightarrow V_c^I = 100 * 5 * \pi = 1570,80 \text{ kN}$$

$$\sum FH = 0 \rightarrow H_b^I = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow M_b^I = 100 * 5 * \pi * \left(\frac{2 * 10}{\pi}\right) - 1570,80 * (10) \rightarrow M_b^I = -5707,96 \text{ kN} * m$$

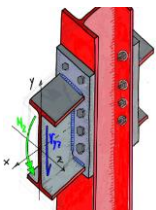
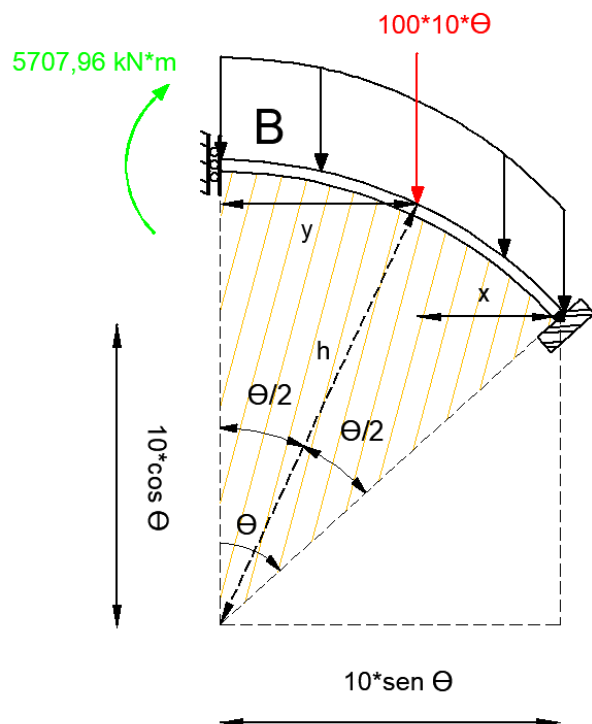
TRAMO I:  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

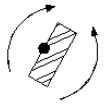
$$h = \frac{10 * \text{sen} \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \frac{20 * \text{sen} \frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$y = \text{sen} \frac{\theta}{2} * h \rightarrow y = \frac{20 * \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$x = 10 * \text{sen} \theta - y \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 10 * \text{sen} \theta - \frac{20 * \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\theta}$$

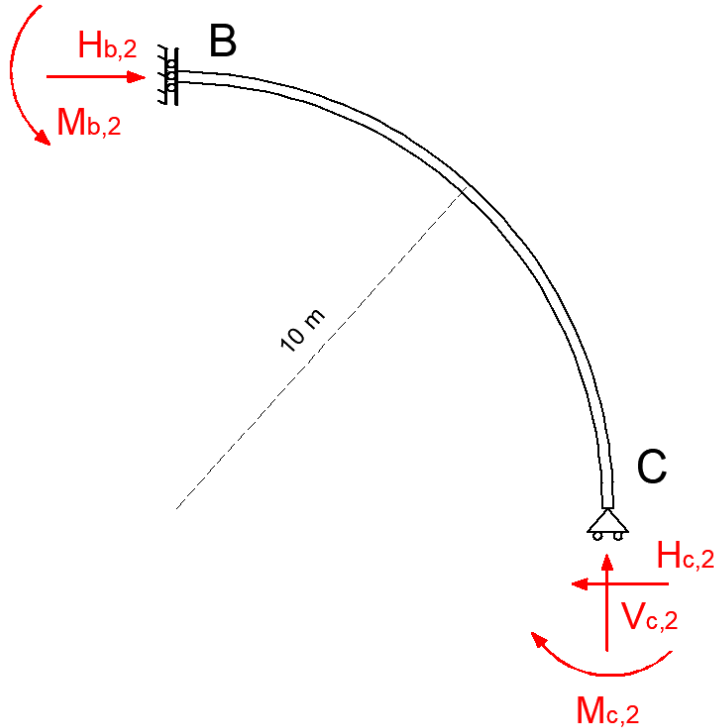




$$Mz_B^C = 5707,96 - 100 * 10 * \theta * x = 5707,96 - 10000 * \theta * \text{sen } \theta + 20000 * \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

### ESTADO II

Calculamos las reacciones y ley de flectores:

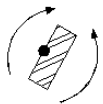


$$\sum FV = 0 \rightarrow V_c^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum FH = 0 \rightarrow H_b^{II} = H_c^{II}$$

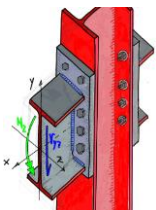
$$\sum M_B = 0 \rightarrow M_b^{II} - M_c^{II} - H_c^{II} * 10 = 0 \rightarrow M_b^{II} = M_c^{II} + H_c^{II} * 10$$

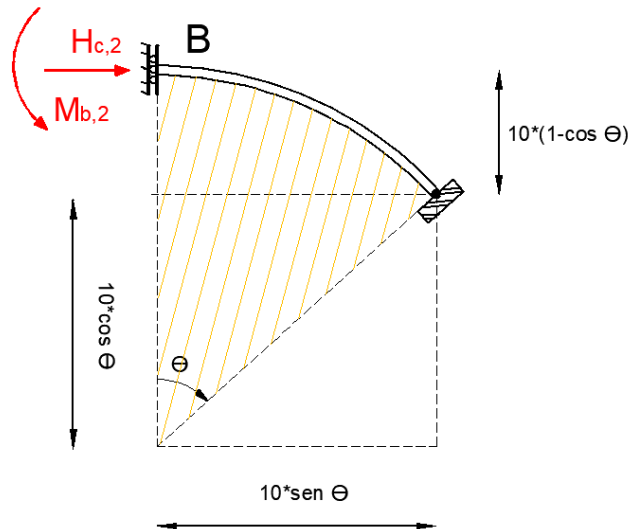
TRAMO I:  $0 \leq \theta \leq \pi/2$



$$Mz_B^C = H_c^{II} * 10 * (1 - \cos \theta) - M_c^{II} - H_c^{II} * 10 =$$

$$= H_c^{II} * 10 - H_c^{II} * 10 * \cos \theta - M_c^{II} - H_c^{II} * 10 = -H_c^{II} * 10 * \cos \theta - M_c^{II}$$





Ahora establecemos las 2 ecuaciones de compatibilidad para resolver el hiperestatismo:

$$U_C = 0$$

$$\theta_C = 0$$

$$U_C = U_B + \theta_B * d + \int_B^C \chi * d(s) * ds \rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{EI} * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 5707,96 - 10000 * \theta * \text{sen } \theta + 20000 * \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) * 10 * \cos \theta * 10 * d\theta +$$

$$+ \frac{1}{EI} * \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-H_c^{II} * 10 * \cos \theta - M_c^{II}) * 10 * \cos \theta * 10 * d\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 392698,75 - 785,40 * H_c^{II} - 100 * M_c^{II} \rightarrow \boxed{785,40 * H_c^{II} + 100 * M_c^{II} = 392698,75}$$

EC-1

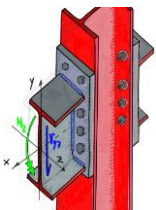
$$\Omega_C = \theta_B + \int_B^C \chi * ds \rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{EI} * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 5707,96 - 10000 * \theta * \text{sen } \theta + 20000 * \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) * 10 * d\theta +$$

$$+ \frac{1}{EI} * \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-H_c^{II} * 10 * \cos \theta - M_c^{II}) * 10 * d\theta = 46740,06 - 100 * H_c^{II} - 15,71 * M_c^{II} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{100 * H_c^{II} + 15,71 * M_c^{II} = 46740,06}$$

EC-2



Pedro MARTINEZ & Sergio RODRIGUEZ

[https://youtube.com/@canal\\_estructuras\\_sergio](https://youtube.com/@canal_estructuras_sergio)

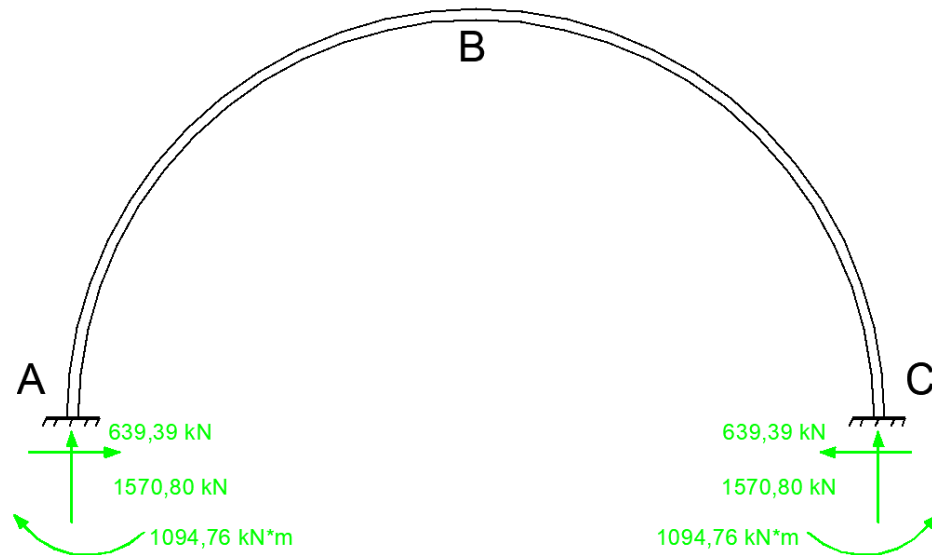


Resolviendo el sistema de ecuaciones de 2 incógnitas conformadas por EC-1 y EC-2 obtenemos las reacciones buscadas:

$$H_c^{II} = 639,39 \text{ kN}$$

$$M_c^{II} = -1094,76 \text{ kN} \cdot m$$

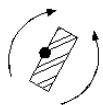
Las reacciones quedarían:



2. Determinación del diagrama de esfuerzos flectores, cortantes y axiales

Diagrama de flectores

La ley de flectores resultará:  $0 \leq \theta \leq \pi/2$



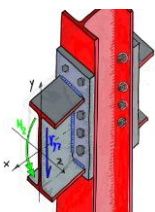
$$Mz_B^C = 5707,96 - 10000 \cdot \theta \cdot \text{sen } \theta + 20000 \cdot \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} - H_c^{II} \cdot 10 \cdot \text{cos } \theta - M_c^{II}$$

$$\theta = 0 \rightarrow Mz_B = 408,82 \text{ kN}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow Mz_C = 1094,76 \text{ kN} \cdot m$$

Imponemos que la función pase por "0" para calcular las posibles intersecciones e interpolamos, obteniendo:

$$Mz_B^C = 0 \rightarrow 5707,96 - 10000 \cdot \theta \cdot \text{sen } \theta + 20000 \cdot \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} - 639,39 \cdot 10 \cdot \text{cos } \theta + 1094,76 = 0$$



$$\theta \simeq 0,51 \text{ rad} \rightarrow \theta = 29,22^\circ$$

$$\theta \simeq 1,34 \text{ rad} \rightarrow \theta = 76,77^\circ$$

Derivamos la ley de flectores, igualamos a "0" e interpolamos para conocer los valores de "θ" asociados a los máximos y mínimos de la función:

$$\frac{dMz_B^C}{d\theta} = 0 \rightarrow -10000 * (\text{sen } \theta + \theta * \text{cos } \theta) + 20000 * \text{cos } \frac{\theta}{2} * \text{sen } \frac{\theta}{2} + 6393,9 * \text{sen}(\theta) = 0$$

$$\theta \simeq 1 \text{ rad} \rightarrow \theta = 57,5^\circ$$

Por último, sustituimos el valor de "θ" en la función y obtenemos el valor restante para terminar de definir el diagrama de flectores:

$$Mz_B^C = 5707,96 - 10000 * 1 * \text{sen } 1 + 20000 * \text{sen}^2 \frac{1}{2} - 639,39 * 10 * \text{cos } 1 + 1094,76 =$$

$$= -469,65 \text{ kN} * \text{m}$$

Como es una estructura simétrica (de carga y de forma) no necesitamos más valores para podernos hacer una idea de la ley de flectores, por lo que la ley quedaría representada de la siguiente manera:

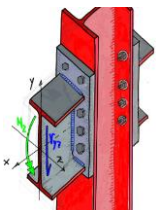
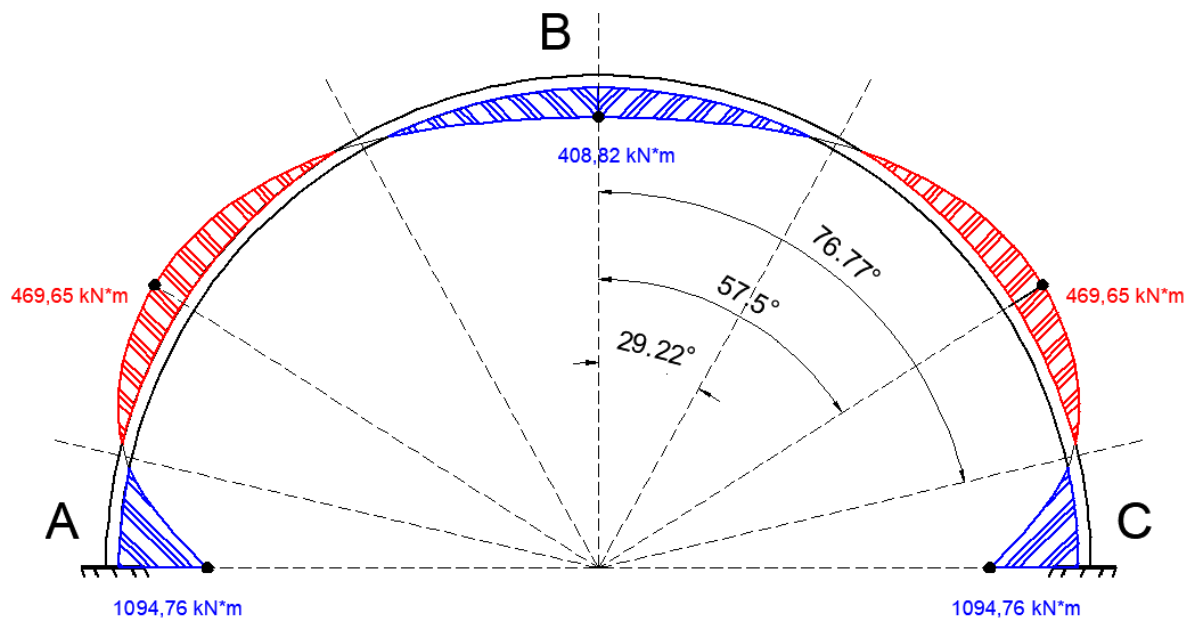


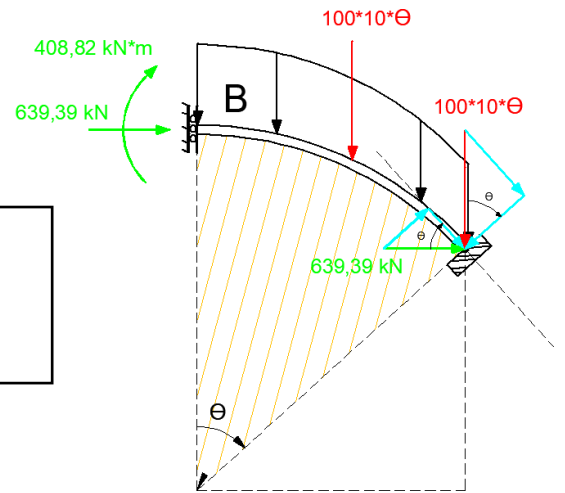


Diagrama de cortantes

La ley de cortantes resultará:  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$V_B^C = 639,39 * \text{sen } \theta - 100 * 10 * \theta * \text{cos } \theta$$

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\rightarrow V_B = 0 \text{ kN} * \text{m} \\ \theta = \frac{\pi}{2} &\rightarrow V_C = 639,39 \text{ kN} \end{aligned}$$



Imponemos que la función pase por "0" para calcular las posibles intersecciones e interpolamos, obteniendo:

$$V_B^C = 639,39 * \text{sen } \theta - 100 * 10 * \theta * \text{cos } \theta = 0$$

$$\theta \approx 1 \text{ rad} \rightarrow \theta = 57,5^\circ$$

Derivamos la ley de cortantes, igualamos a "0" e interpolamos para conocer los valores de "θ" asociados a los máximos y mínimos de la función:

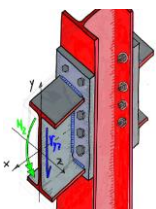
$$\frac{dV_B^C}{d\theta} = 0 \rightarrow 639,39 * \text{cos } \theta - 1000 * (\text{cos } \theta - \theta * \text{sen } \theta) = 0$$

$$\theta \approx 0,57 \text{ rad} \rightarrow \theta = 32,66^\circ$$

Por último, sustituimos el valor de "θ" en la función y obtenemos el valor restante para terminar de definir el diagrama de cortantes:

$$V_B^C = 639,39 * \text{sen } 0,57 - 100 * 10 * 0,57 * \text{cos } 0,57 = -134,85 \text{ kN}$$

La ley de cortantes no es una ley simétrica, por lo que se procedería de igual manera a la descrita anteriormente para su cálculo quedando representada de la siguiente manera:



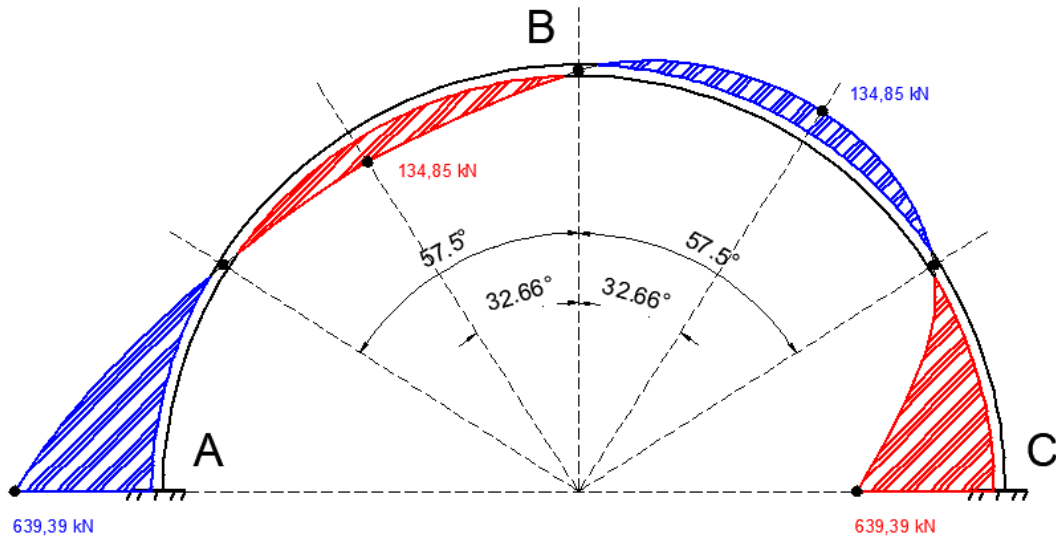
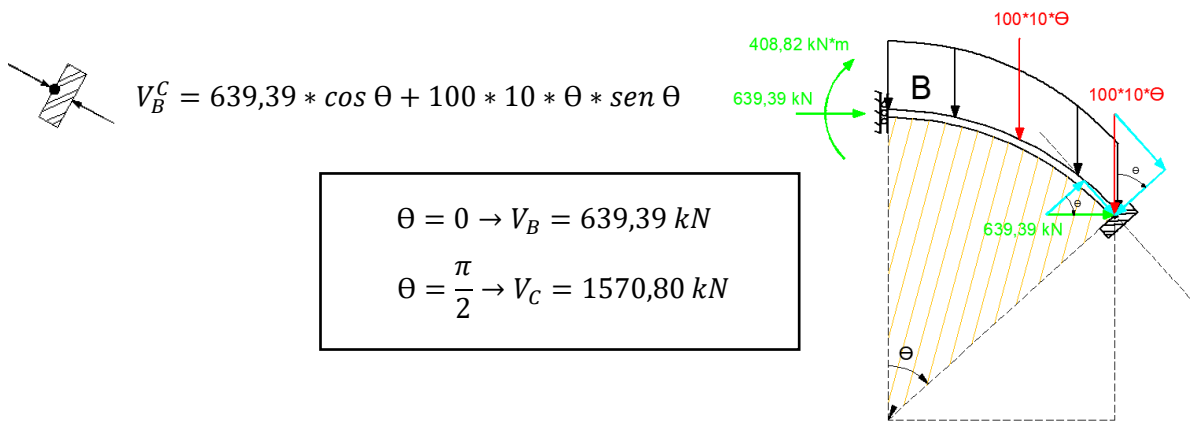


Diagrama de axiles

La ley de axiles resultará:  $0 \leq \theta \leq \pi/2$



$$V_B^C = 639,39 * \cos \theta + 100 * 10 * \theta * \sin \theta$$

$$\theta = 0 \rightarrow V_B = 639,39 \text{ kN}$$

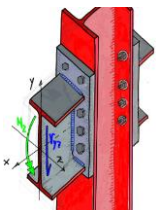
$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow V_C = 1570,80 \text{ kN}$$

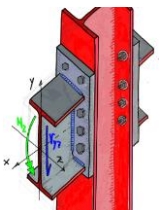
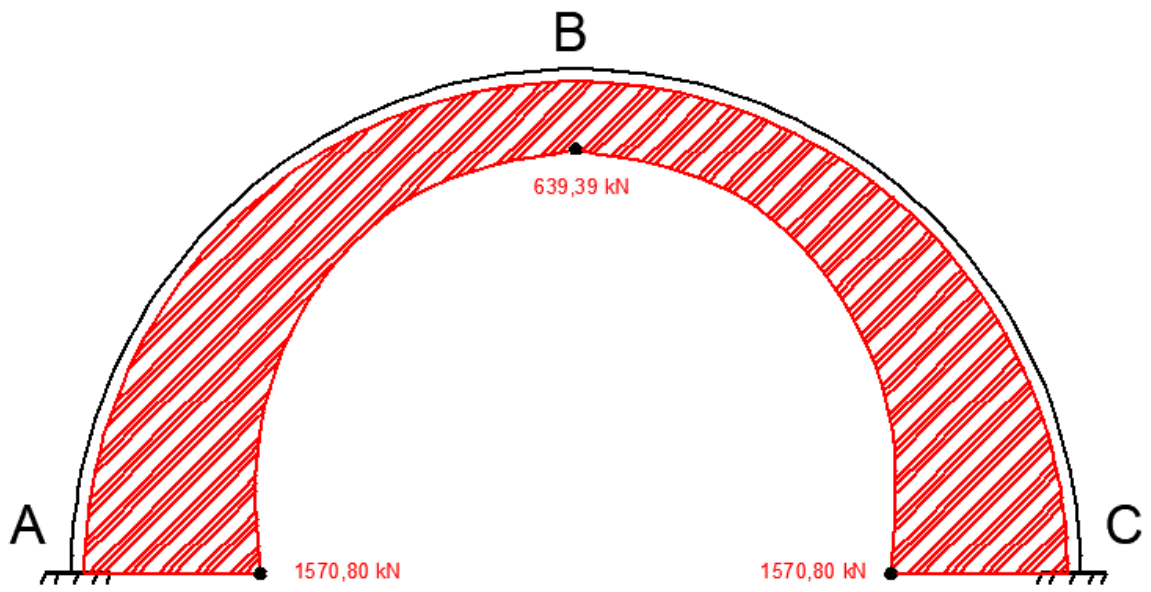
Imponemos que la función pase por "0" para calcular las posibles intersecciones e interpolamos, obteniendo:

$$V_B^C = 639,39 * \cos \theta + 100 * 10 * \theta * \sin \theta = 0$$

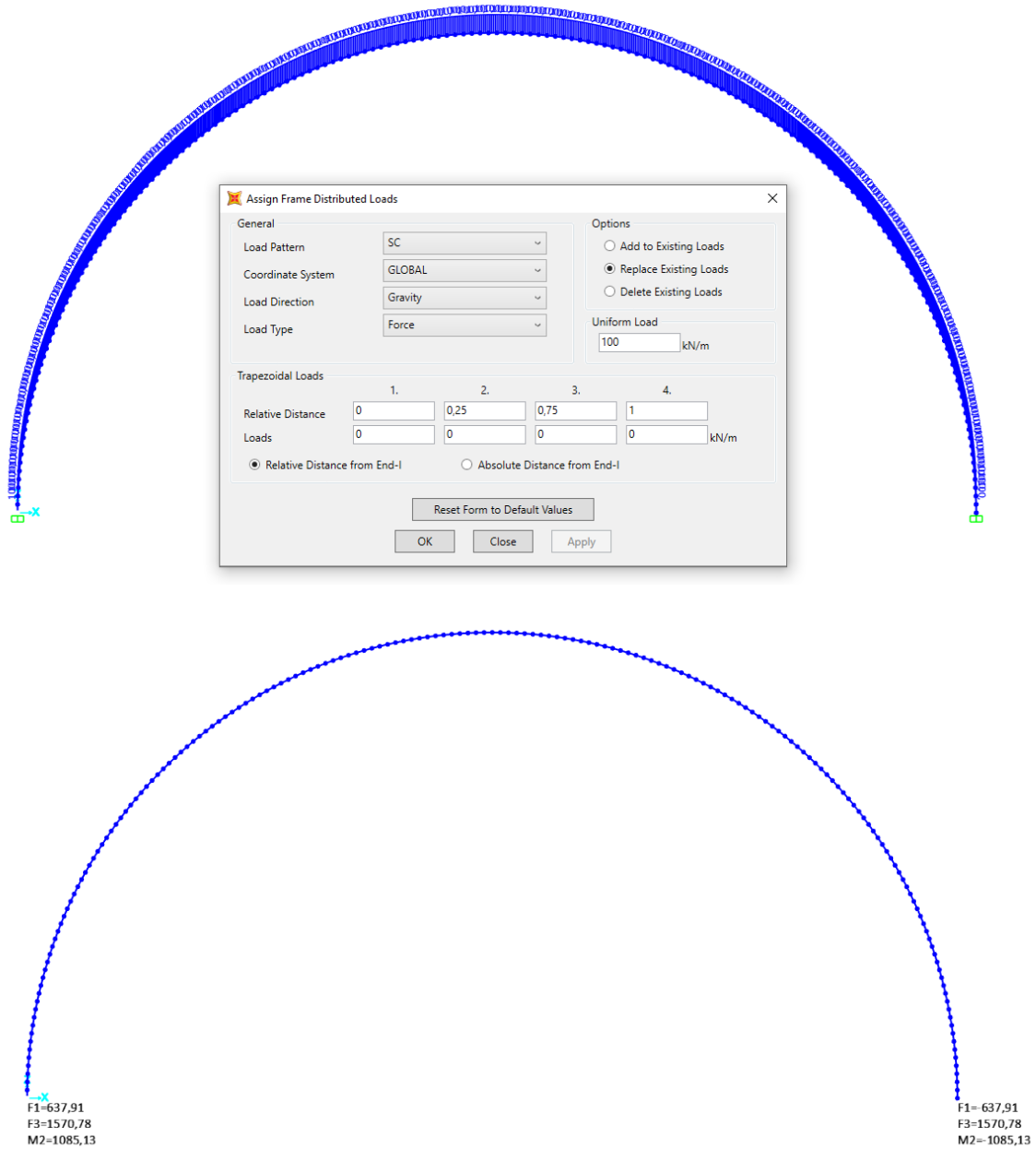
∅ intersecciones

La ley de axiles es una ley simétrica, por lo que quedará representada de la siguiente manera:

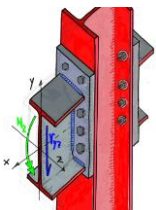




3. Comparación de resultados usando SAP2000

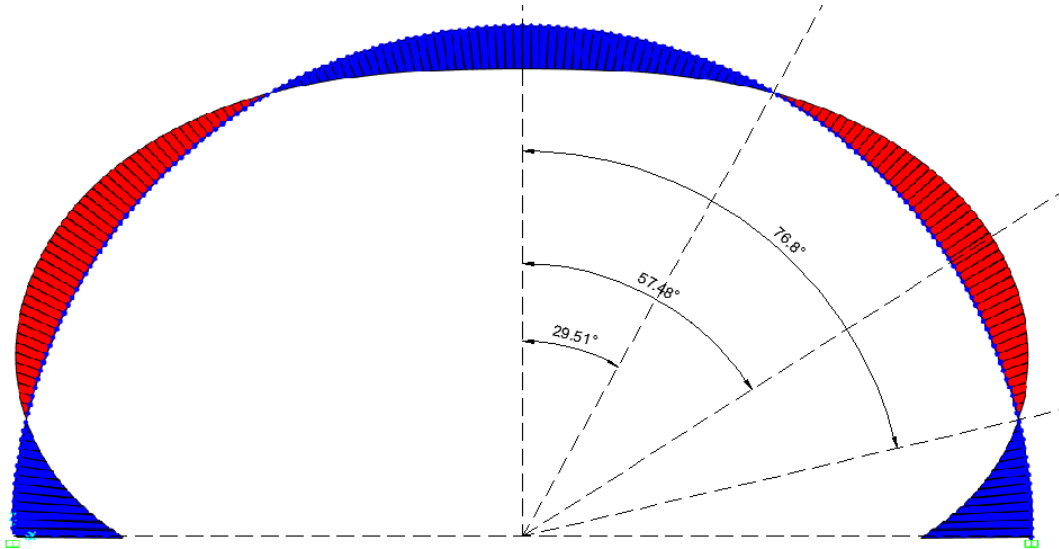


RESUMEN CÁLCULOS [REACCIONES]								
TABLE: Joint Reactions						Cálculo tradicional		
Joint	OutputCase	CaseType	F1	F3	M2	F1	F3	M2
Text	Text	Text	KN	KN	KN-m	KN	KN	KN-m
1	SC	LinStatic	637,91	1570,78	1085,13	-639,39	1570,80	1094,76
199	SC	LinStatic	-637,91	1570,78	-1085,13	639,39	1570,80	-1094,76



NOTA: Los signos de las reacciones y esfuerzos dependen del convenio empleado

Diagrama de flectores



RESUMEN CÁLCULOS [FLECTOR]							
TABLE: Element Forces - Frames [SAP 2000]					Cálculo tradicional		Variación
Frame	Station	OutputCase	CaseType	M3	$\Theta$	M3	%
Text	m	Text	Text	KN-m	RAD	KN-m	
19	0	SC	LinStatic	1085,13	$\pi/2$	1094,76	0,88
50	0,15271	SC	LinStatic	-470,82	1	-469,65	0,25
108	0,02182	SC	LinStatic	413,82	0	408,82	1,21
167	0,02182	SC	LinStatic	-470,82	1	-469,65	0,25
198	0,17453	SC	LinStatic	1085,13	$\pi/2$	1094,76	0,88

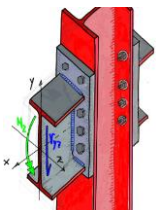
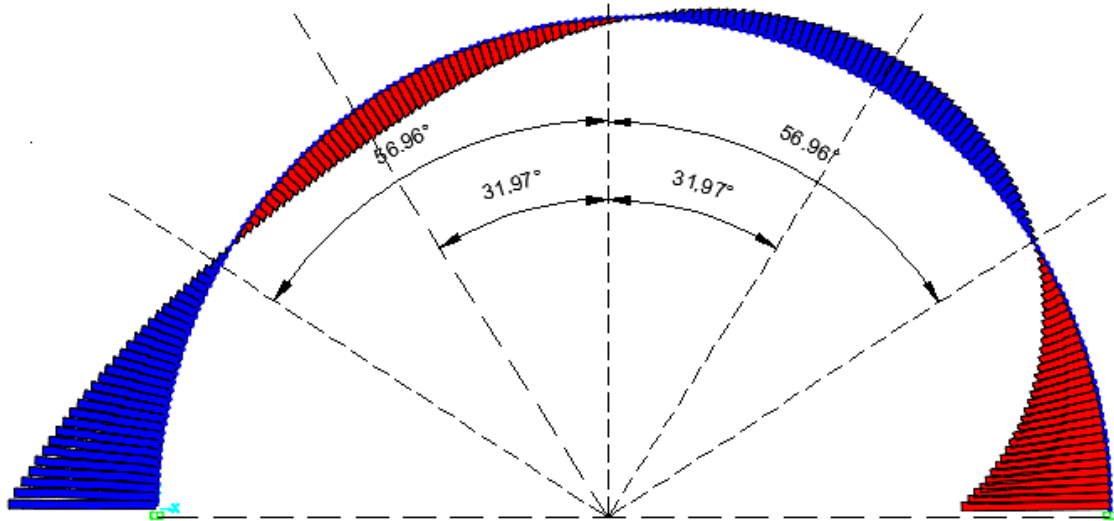


Diagrama de cortantes



RESUMEN CÁLCULOS [CORTANTE]							
TABLE: Element Forces - Frames [SAP 2000]					Cálculo tradicional		Variación
Frame	Station	OutputCase	CaseType	V2	$\theta$	V2	%
Text	m	Text	Text	KN	RAD	KN-m	
19	0	SC	LinStatic	624,18	$\pi/2$	-639,39	2,38
80	0,1309	SC	LinStatic	-128,91	0,57	134,85	4,40
137	0,04363	SC	LinStatic	128,91	0,57	-134,85	4,40
198	0,17453	SC	LinStatic	-624,18	$\pi/2$	639,39	2,38

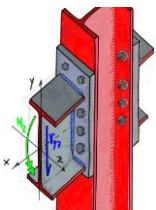
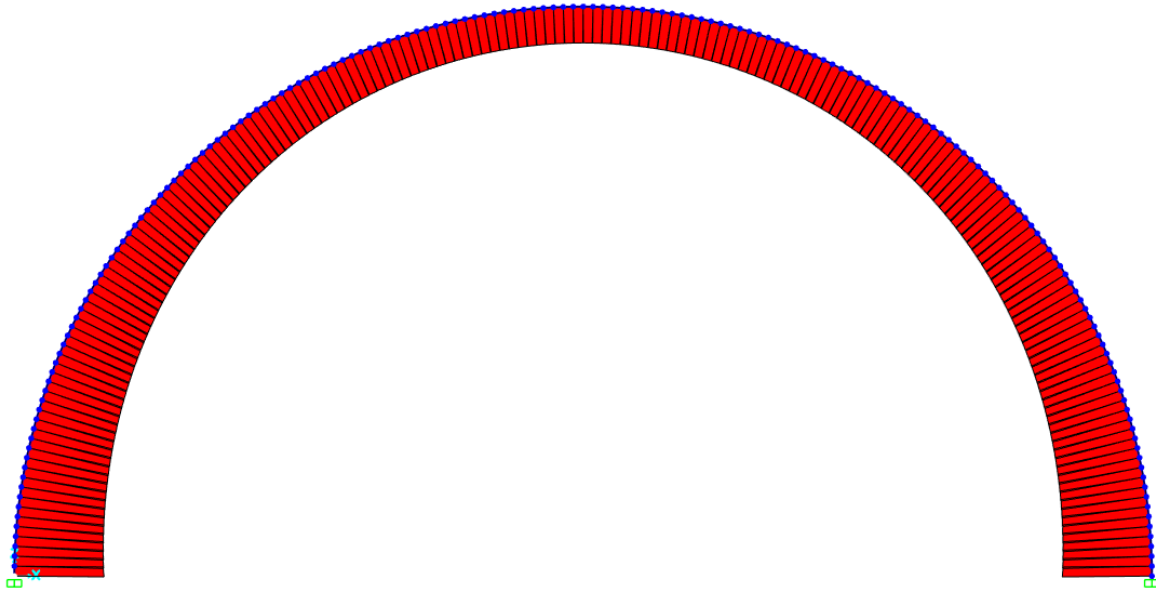


Diagrama de axiles



RESUMEN CÁLCULOS [AXIL]							
TABLE: Element Forces - Frames [SAP 2000]					Cálculo tradicional		Variación
Frame	Station	OutputCase	CaseType	P	$\Theta$	N	%
Text	m	Text	Text	KN	RAD	KN-m	
19	0	SC	LinStatic	-1576,28	$\pi/2$	1570,8	0,35
111	0,1309	SC	LinStatic	-639,40	1	639,39	0,00
198	0,17453	SC	LinStatic	-1576,28	0	1570,8	0,35

